

(12)

## CERERE DE BREVET DE INVENȚIE

(21) Nr. cerere: a 2022 00020

(22) Data de depozit: 21/01/2022

(41) Data publicării cererii:  
29/07/2022 BOPI nr. 7/2022

(71) Solicitant:  
• UNIVERSITATEA PETROL-GAZE DIN  
PLOIEȘTI, BD. BUCUREȘTI NR. 39,  
PLOIEȘTI, PH, RO

(72) Inventatori:  
• BOGDAN-ROTH MIHAIL, STR. TÂRNAVE,  
NR. 1, BL. A1, SC. G, AP. 98, PLOIEȘTI, PH,  
RO;

• ROMANEȚ MIRELA, STR. ÎNFRĂȚIRII,  
NR. 7, BL. 5, SC. B, AP. 36, PLOIEȘTI, PH,  
RO;  
• POPA ALEXANDRU, PIAȚA EROILOR,  
NR. 3, BL. 32D, AP. 21, PLOIEȘTI, PH, RO;  
• DINIȚA ALIN, STR. CRIȘAN, NR. 24A,  
BL. 135C, SC. B, AP. 17, PLOIEȘTI, PH, RO;  
• DINU FLORINEL, STR. GHEORGHE DOJA  
NR. 15, BL. 35C, ET. 7, AP. 25, PLOIEȘTI, PH,  
RO

(54) **DISPOZITIV DIDACTIC PENTRU STUDIUL ECHILIBRULUI  
PUNCTULUI MATERIAL LEGAT BILATERAL DE UN CERC  
CU MĂSURAREA DIGITALĂ A UNGHIULUI**

(57) Rezumat:

Invenția se referă la un dispozitiv didactic pentru studiul echilibrului punctului material legat bilateral de un cerc cu măsurarea digitală a unghiului. Dispozitivul conform invenției este compus dintr-un disc (1) inelar menținut în poziție verticală prin intermediul unei bare (2) cilindrice, verticale fixată pe un stativ (3) cu trei picioare prevăzută cu niște șuruburi (4) de fixare și niște tălpi (5) de așezare, pe bara (2) cilindrică, verticală este montată o bulă (6) de nivel pe două direcții fixată pe un suport pentru asigurarea orizontalității unei bare (7) paralelipipedice, care materializează diametrul orizontal al discului (1) circular, într-un punct (C) central al discului (1) circular este articulată o tijă (8) pe care este montat un braț al unui dispozitiv (11) de măsurare a unghiului, la un capăt al tijei (8) este montat un știft (10) care urmărește conturul median al discului (1) circular, iar la celălalt capăt al tijei (8) este montată o contragreutate (9) pentru a asigura ca centrul de greutate al tijei (8) împreună cu brațul dispozitivului (11) de măsurare a unghiului să se găsească în punctul (C).

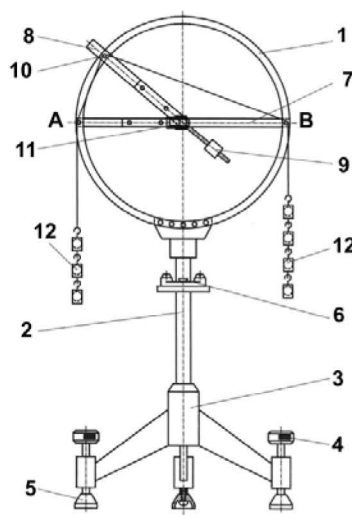
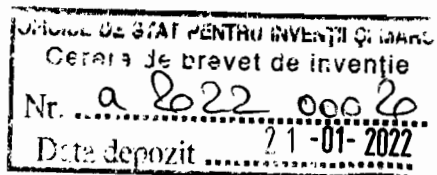


Fig. 1

Revendicări: 1  
Figuri: 7

Cu începere de la data publicării cererii de brevet, cererea asigură, în mod provizoriu, solicitantului, protecția conferită potrivit dispozițiilor art. 32 din Legea nr. 64/1991, cu excepția cazurilor în care cererea de brevet de invenție a fost respinsă, retrasă sau considerată ca fiind retrasă. Întinderea protecției conferite de cererea de brevet de invenție este determinată de revendicările conținute în cererea publicată în conformitate cu art. 23 alin. (1) - (3).





33

1

## DISPOZITIV DIDACTIC PENTRU STUDIUL ECHILIBRULUI PUNCTULUI MATERIAL LEGAT BILATERAL DE UN CERC CU MĂSURAREA DIGITALĂ A UNGHIULUI

Dispozitivul didactic pentru studiul echilibrului punctului material legat bilateral de un cerc prezentat în **fig.1** este compus dintr-un disc inelar (1), menținut în poziția verticală prin intermediul unei bare cilindrice verticale (2) fixată pe un stativ cu trei picioare (3) prevăzut cu șuruburi de fixare (4) și tălpi de așezare (5).

În continuare dăm un exemplu de aplicare a invenției cu referire la figurile 1.....7.

-**fig. 1**, schița dispozitivului didactic pentru studiul echilibrului punctului material legat bilateral de un cerc,

-**fig. 2**, modelarea mecanică a echilibrului punctului material legat bilateral de un cerc acționat de două forțe orientate către punctele **A** și **B** al diametrului orizontal al cercului în cazul semicercului superior,

-**fig. 3**, modelarea mecanică a echilibrului punctului material legat bilateral de un cerc acționat de două forțe orientate către punctele **A** și **B** al diametrului orizontal al cercului în cazul semicercului inferior,

-**fig. 4**, modelarea mecanică a echilibrului punctului material legat bilateral de un cerc acționat de o forță verticală și a doua orientată către punctul **B** al diametrului orizontal al cercului în cazul semicercului superior,

-**fig. 5**, modelarea mecanică a echilibrului punctului material legat bilateral de un cerc acționat de o forță verticală și a doua orientată către punctul **B** al diametrului orizontal al cercului în cazul semicercului inferior,

-**fig. 6**, modelarea mecanică a echilibrului punctului material legat bilateral de un cerc acționat de trei forțe, două orientate către punctele **A** și **B** al diametrului orizontal al cercului și o a treia verticală în cazul semicercului superior,

-**fig. 7**, modelarea mecanică a echilibrului punctului material legat bilateral de un cerc acționat de trei forțe, două orientate către punctele **A** și **B** al diametrului orizontal al cercului și o a treia verticală în cazul semicercului inferior.

Pe bara cilindrică verticală (2) este montată o bulă de nivel pe două direcții (6) fixată pe un suport pentru asigurarea orizontalității barei paralelipipedice (7) care materializează diametrul orizontal ACB al discului cilindric (1).

În centrul C al discului cilindric (1) este articulată o tijă (8) pe care este montat un braț al dispozitivului digital de măsurare a unghiului (11) cu axul raportorului în punctul C. La capătul tijei (8) este montat un știft (10) care urmărește conturul median al discului circular (1) și care materializează punctul M legat bilateral de cerc. La celălalt capăt al tijei (8) este montată o contragreutate (9) pentru a asigura ca centrul de greutate al tijei împreună cu brațul dispozitivului digital de măsurare a unghiului să se găsească în punctul C.

Pentru realizarea *echilibrului indiferent*, brațul dispozitivului digital de măsurare a unghiului (10) legat de tijă se detașează de celălalt braț al dispozitivului digital de măsurare a unghiului și se echilibrează cu contragreutatea (9) care este blocată cu un șurub de fixare de tija (8) în momentul asigurării echilibrului indiferent pentru păstrarea acestui echilibru. În acest mod punctul material M are masa neglijabilă.

La capetele diametrului orizontal al cercului median sunt înșurubate două știfturi notate cu A și B peste care sunt tangente firele legate cu un capăt de știftul M și prevăzute la celălalt capăt cu greutateți etalonate (12) pentru a materializa forțele  $\overline{F_1}$  și  $\overline{F_2}$  ce acționează punctul material.

### ***Baza teoretică***

Cu ajutorul dispozitivului se pot materializa o serie de probleme de echilibru a punctului material legat de o curbă circulară. Prezintă trei tipuri de situații ce pot fi materializate pe dispozitivul menționat. Dacă legătura, curba circulară, o considerăm separată de un diametru orizontal ACB, o variantă va fi considerată pentru semicercul superior, iar a doua pentru semicercul inferior.

#### **1. Punctul material acționat de două forțe orientate către capetele diametrului orizontal AB**

Punctul M, de greutate neglijabilă, legat de semicerc, este acționat de două forțe  $\overline{F_1}$  și  $\overline{F_2}$  orientate către capetele A și B ale diametrului orizontal (fig. 2 și fig. 3).

##### **a) Semicercul superior (fig.2)**

Dacă eliberăm punctul de legătură și punem condiția de echilibru obținem ecuația vectorială:

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{N} = 0 \quad (1)$$

Aceasta este proiecția pe direcțiile  $\bar{\tau}$  și  $\bar{\nu}$  conduce la ecuațiile:

$$\text{Proiecție pe direcția } \bar{\tau} = 0 \rightarrow F_2 \sin \alpha - F_1 \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\text{Proiecție pe direcția } \bar{\nu} = 0 \rightarrow -N + F_2 \cos \alpha + F_1 \sin \alpha = 0 \quad (3)$$

Din ecuația (2) se poate determina poziția de echilibru cu relația:

$$\operatorname{tg} \alpha = F_1 / F_2 \quad (4)$$

Iar din ecuația (3) se poate determina mărimea reacțiunii normale  $N$ :

$$N = F_2 \cos \alpha + F_1 \sin \alpha = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \quad (5)$$

### b) Semicercul inferior (fig.3)

Procedând similar ca în cazul variantei (a) se obțin aceleași relații (4) și (5), pentru determinarea poziției de echilibru și a mărimii reacțiunii normale.

## 2 . Punctul material acționat de două forțe: una verticală și una orientată către unul din capetele diametrului orizontal AB

Punctul  $M$  de masă neglijabilă este acționat tot de două forțe: una verticală și alta îndreptată către unul din extremele diametrului semicercului (fig. 4 și fig. 5).

### a) Semicercul superior (fig.4)

Eliberăm punctul material de legături, aplicăm axioma legăturilor și punem condiția de echilibru dată de ecuația (1).

Proiecția pe axele triedrului intrinsec (Frenet) conduce la relațiile:

$$\text{Proiecție pe direcția } \bar{\tau} = 0 \rightarrow F_2 \sin \alpha - F_1 \cos 2\alpha = 0 \quad (6)$$

$$\text{Proiecție pe direcția } \bar{\nu} = 0 \rightarrow -N + F_2 \cos \alpha + F_1 \sin 2\alpha = 0 \quad (7)$$

Din ecuația (6) se obține poziția de echilibru rezultată din rezolvarea ecuației de gradul 2:

$$2F_1 \sin^2 \alpha + F_2 \sin \alpha - F_1 = 0 \quad (8)$$

Vom alege soluția pozitivă a ecuației (8):

$$\sin \alpha = \frac{-F_2 + \sqrt{F_2^2 + 8F_1^2}}{4F_1} \quad (9)$$

Din ecuația (7) se poate determina mărimea reacțiunii normale  $N$ :

$$N = F_2 \cos \alpha + F_1 \sin 2\alpha = \frac{F_2 + \sqrt{F_2^2 + 8F_1^2}}{8F_1} \sqrt{8F_1^2 - 2F_2^2 + 2F_2 \sqrt{F_2^2 + 8F_1^2}} \quad (10)$$

**b) Semicercul inferior (fig.5)**

După eliberarea punctului material de legătură și aplicarea axiomei legăturilor, proiecția ecuației (1) pe axele sistemului de referință intrinsec (Frenet) conduce la ecuațiile:

$$\text{Proiecție pe direcția } \bar{\tau} = 0 \rightarrow F_1 \cos 2\alpha - F_2 \cos \alpha = 0 \quad (11)$$

$$\text{Proiecție pe direcția } \bar{\nu} = 0 \rightarrow -N - F_1 \sin 2\alpha + F_2 \sin \alpha = 0 \quad (12)$$

Din ecuația (11) se obține poziția de echilibru, dată de ecuația de gradul 2 (13)

$$2F_1 \cos^2 \alpha - F_2 \cos \alpha - F_1 = 0 \quad (13)$$

Alegând soluția pozitivă a ecuației de gradul 2 rezultă:

$$\cos \alpha = \frac{F_2 + \sqrt{F_2^2 + 8F_1^2}}{4F_1} \quad (14)$$

Mărimea reacțiunii normale  $N$  se obține din ecuația (12):

$$N = F_2 \cos \alpha - F_1 \sin 2\alpha = \frac{F_2 - \sqrt{F_2^2 + 8F_1^2}}{8F_1} \sqrt{8F_1^2 - 2F_2^2 - 2F_2 \sqrt{F_2^2 + 8F_1^2}} \quad (15)$$

**3. Punctul material acționat de trei forțe**

Punctul  $M$  este acționat de trei forțe: două orientate către capetele diametrului orizontal, punctele  $A$ , respectiv  $B$ , la care se adaugă o a treia forță verticală.

**a) Semicercul superior (fig. 6)**

În acest caz ecuația de echilibru al punctului devine:

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{N} = 0 \quad (16)$$

Proiecțiile ecuației (16) pe axele triedrului Frenet sunt:

$$\text{Proiecție pe direcția } \bar{\tau} = 0 \rightarrow F_1 \cos \alpha + F_3 \cos 2\alpha - F_2 \sin \alpha = 0 \quad (17)$$

$$\text{Proiecție pe direcția } \bar{\nu} = 0 \rightarrow F_1 \sin \alpha + F_3 \sin 2\alpha + F_2 \cos \alpha - N = 0 \quad (18)$$

Dacă vom nota  $\text{tg} \alpha = t$  și vom înlocui în ecuația (17) funcțiile trigonometrice  $\sin \alpha$  și  $\cos 2\alpha$  în funcție de  $\text{tg} \alpha$ , în urma unor calcule matematice simple se ajunge la următoarea ecuație de gradul 4 în  $t$ :

$$(F_2^2 - F_3^2)t^4 - 2F_1F_2t^3 + (2F_3^2 + F_1^2 + F_2^2)t^2 - 2F_1F_2t + (F_1^2 - F_3^2) = 0 \quad (19)$$

Care poate fi rezolvată prin metode numerice. Se va alege soluția reală pozitivă. Din ecuația (18) se poate determina mărimea reacțiunii normale N:

$$N = F_1 \sin \alpha + F_2 \cos \alpha + F_3 \sin 2\alpha \quad (20)$$

**b) Semicercul inferior (fig.7)**

Ecuația vectorială (16) proiectată pe axele triedrului Frenet este reprezentată de ecuațiile:

$$\text{Proiecție pe direcția } \tau = 0 \rightarrow F_2 \sin \alpha + F_3 \cos 2\alpha - F_1 \cos \alpha = 0 \quad (21)$$

$$\text{Proiecție pe direcția } \bar{\nu} = 0 \rightarrow F_2 \cos \alpha + F_1 \sin \alpha - F_2 \sin 2\alpha - N = 0 \quad (22)$$

Procedând în mod similar ca în cazul anterior se obține aceeași ecuație (20) pentru determinarea poziției de echilibru. Mărimea reacțiunii normale N însă are expresia:

$$N = F_1 \sin \alpha + F_2 \cos \alpha - F_3 \sin 2\alpha \quad (23)$$

Cu ajutorul acestui dispozitiv nu avem posibilitatea măsurării mărimii reacțiunii normale N.

## Revendicări

1. Dispozitivul didactic pentru studiul echilibrului punctului material legat bilateral de un cerc cu măsurarea digitală a unghiului **este caracterizat prin aceea că vizualizează poziția de echilibru rezultată pentru sistemul de forțe active ales și această poziție este stabilită cu precizie.** Dispozitivul permite analiza echilibrului punctului material în situații diverse. Este asigurată o precizie mare prin folosirea sistemului (11) de măsurare digitală a unghiului. În acest mod studenții din învățământul superior tehnic pot aprofunda cunoștințele teoretice prin verificarea experimentală a noțiunilor predate.

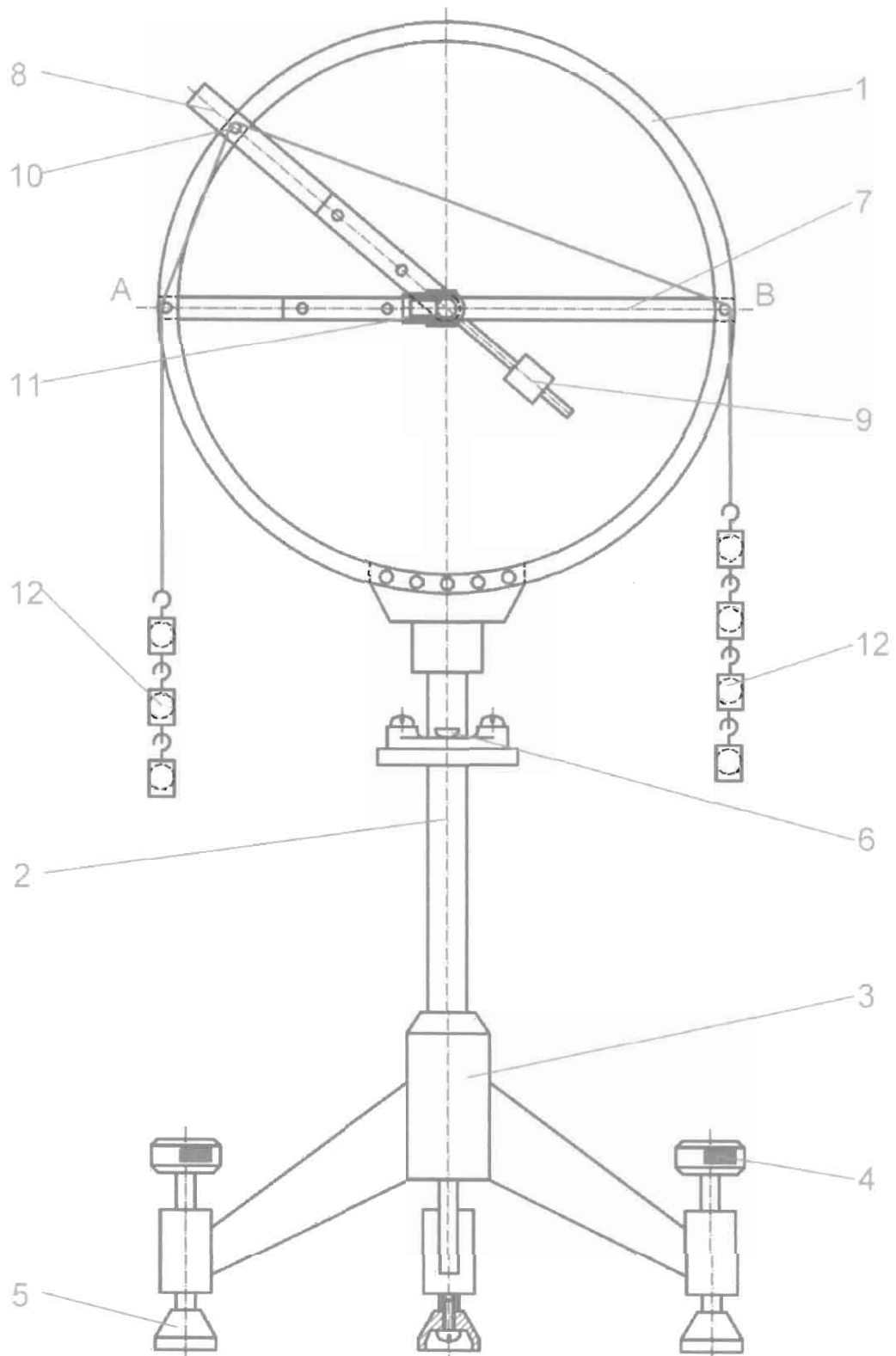


Fig. 1



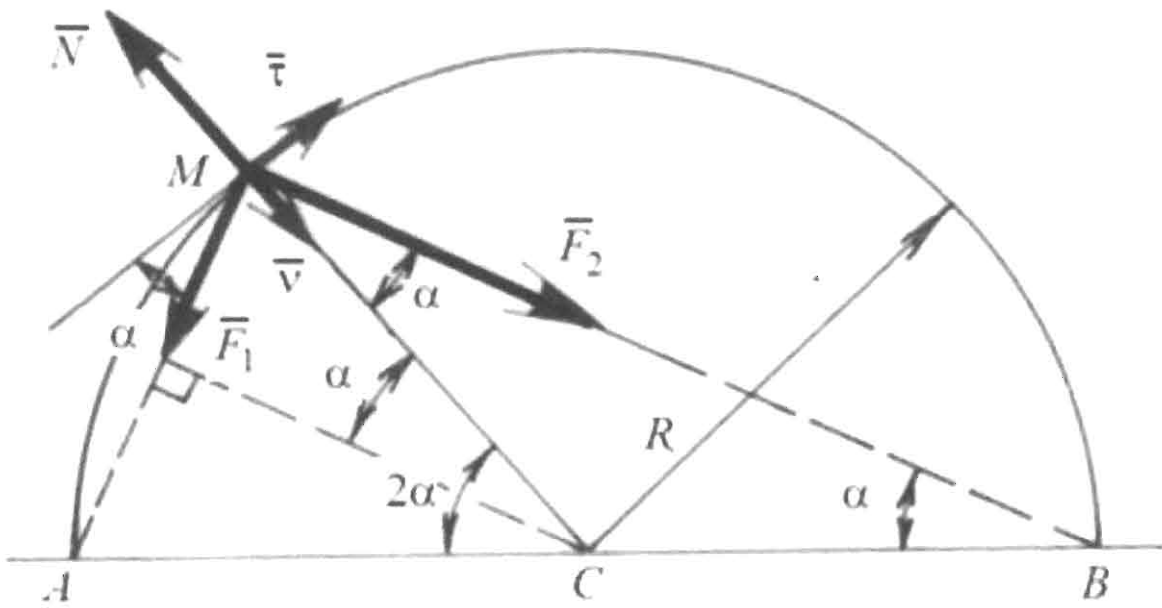


Fig. 2

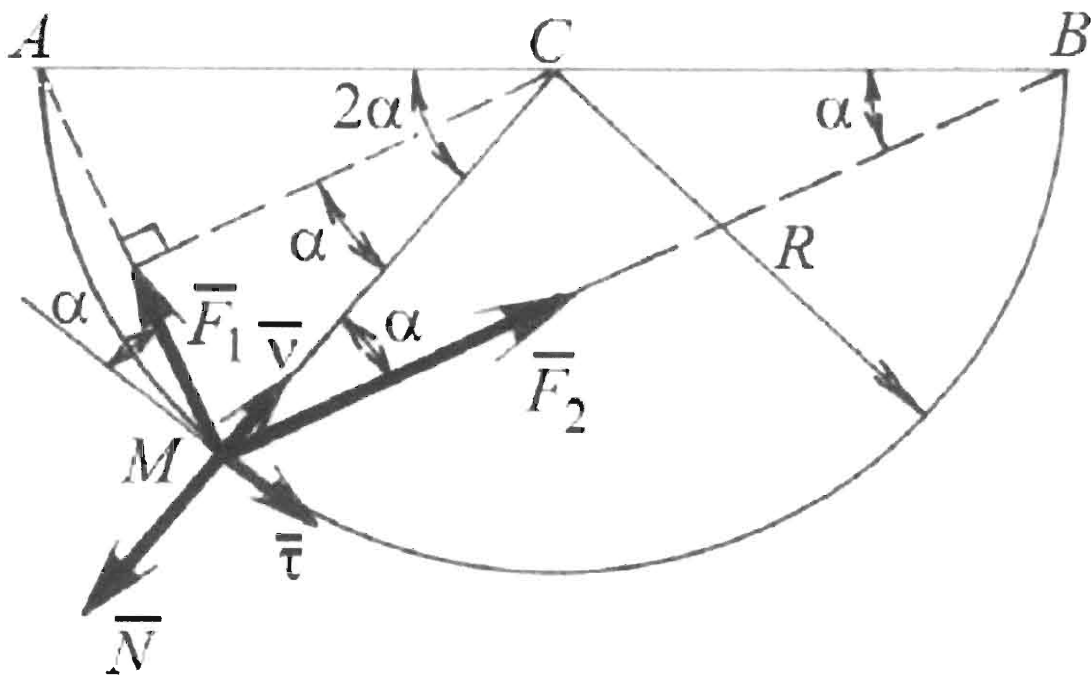


Fig. 3

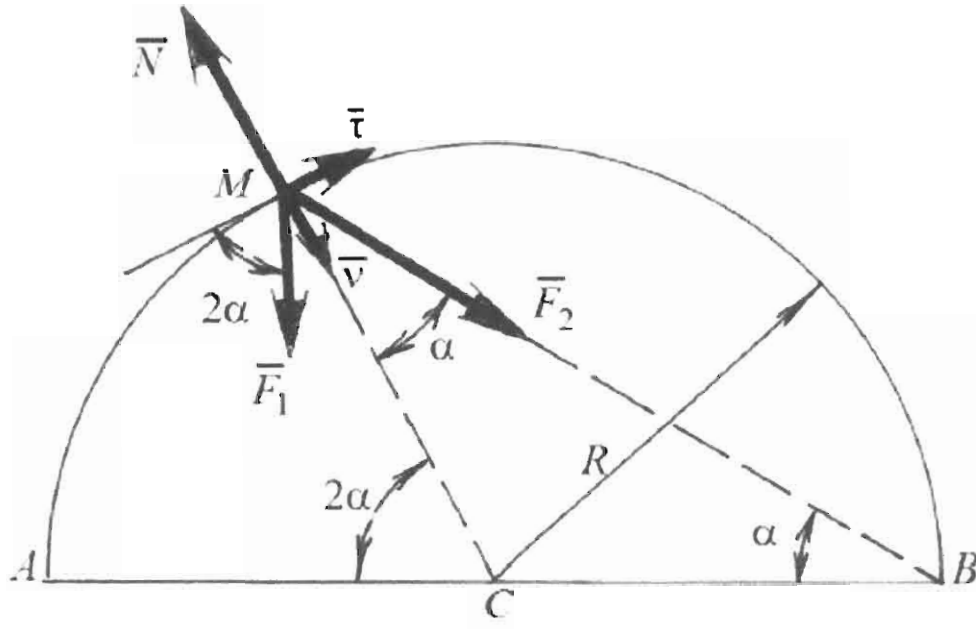


Fig. 4

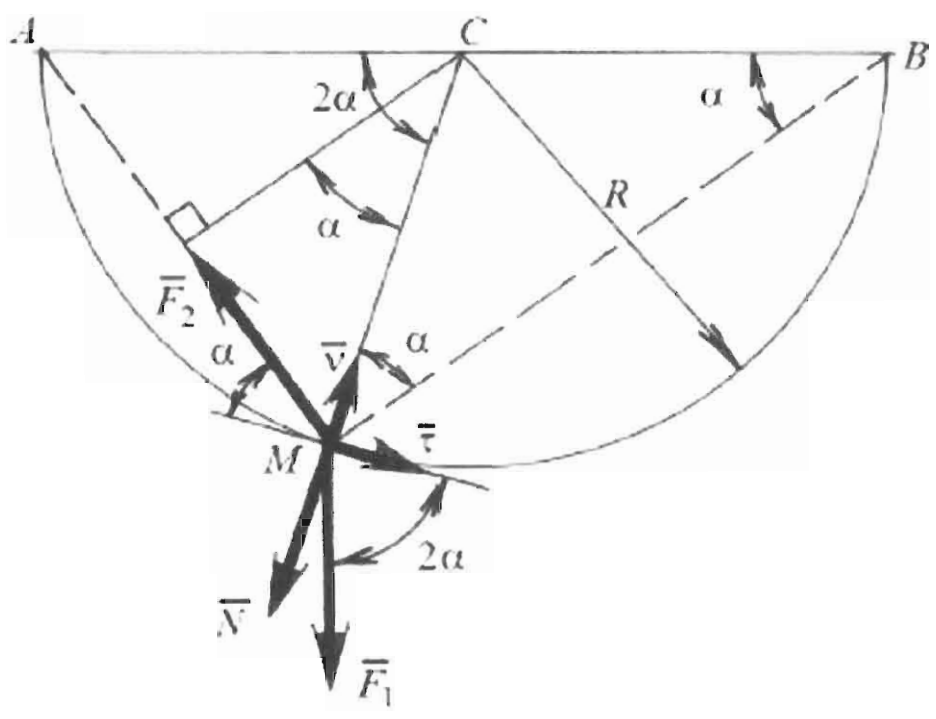


Fig.

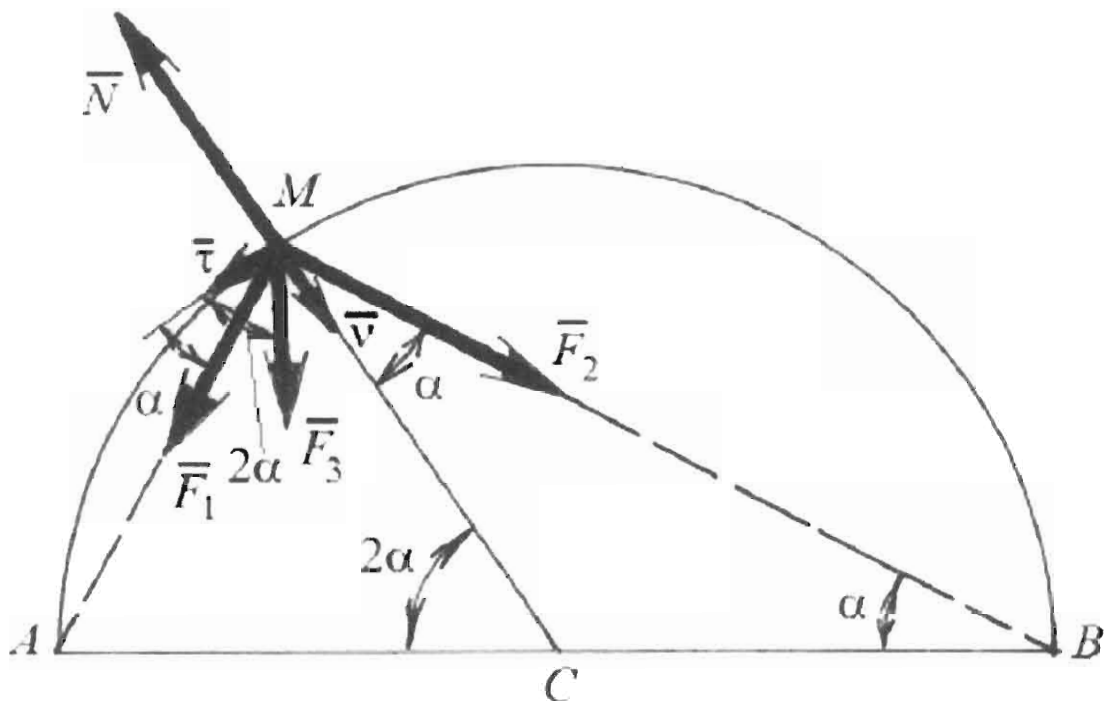


Fig.6

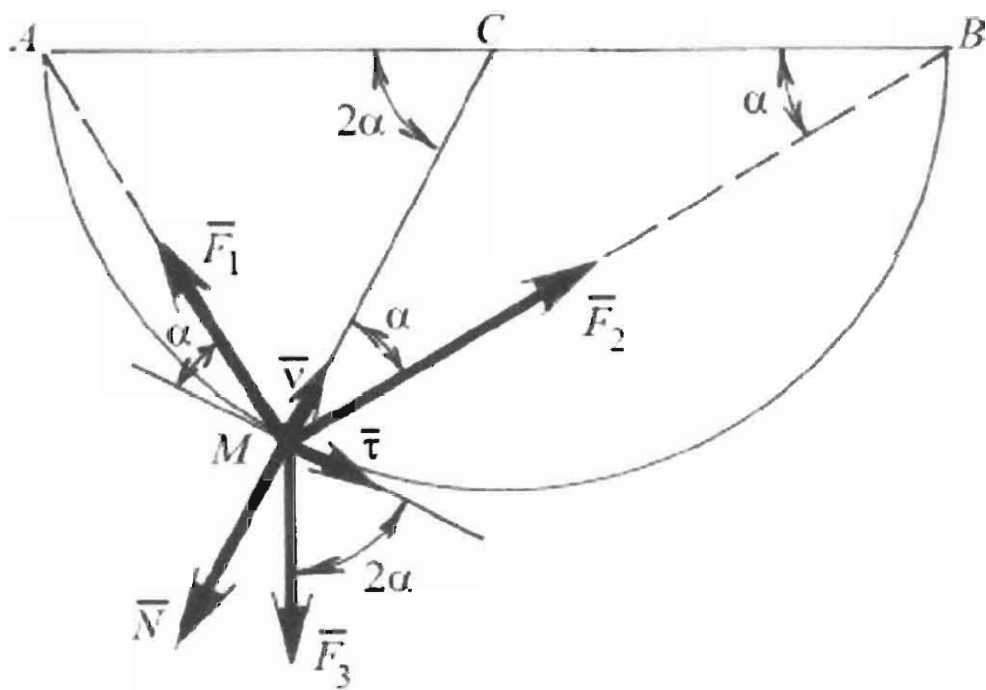


Fig. 7